

# مکانیک سیالات پیشرفته



دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده مهندسی مکانیک

ادامه مطالب فصل اول

کلاس درس دکتر نوروزی  
اسفند ۹۹

## سیال نیوتنی

مطابق گزارش اسحاق نیوتن نیروی مقاوم سیال در برابر حرکت یک جسم جامد در آن با سرعت آن متناسب است:

$$F \propto U \rightarrow F = cU$$

در جریان برشی ساده، داریم:

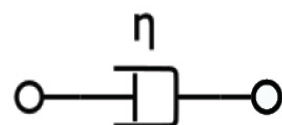
$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} \quad \& \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{H} \rightarrow F = \tau_{xy} A \quad \& \quad U = H \dot{\gamma}$$

بنابراین:

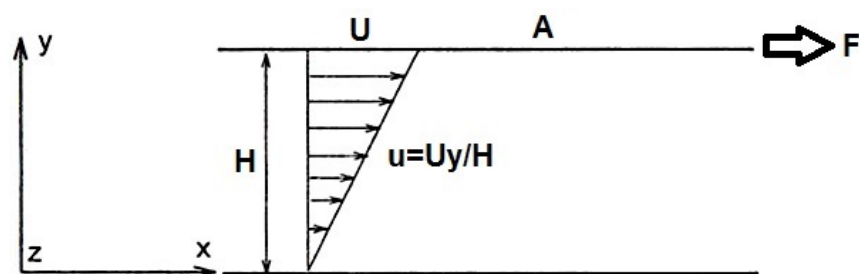
$$\tau_{xy} = \left( \frac{cH}{A} \right) \dot{\gamma}_{xy} \rightarrow \tau_{xy} \propto \dot{\gamma}_{xy} \rightarrow \tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}_{xy} \quad (1)$$

که در رابطه فوق  $\mu$  ویسکوزیته سیال است.

لذا، سیال نیوتنی سیالی است که در آن تنش برشی فقط رابطه ای خطی با نرخ دارد.



$$F = cU \quad \text{or} \quad \tau = \eta \dot{\gamma}$$



## ویسکوزیته در گازها

با استفاده از تابع توزیع بولتزمن برای گاز ایده آل می توان نشان داد که

$$\mu = \frac{2}{3} \rho \lambda c \quad \text{or} \quad \mu = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi d^2} \rightarrow \mu \propto \sqrt{T} \quad (2)$$

در رابطه فوق،  $\rho$  چگالی،  $\lambda$  مسیر آزاد متوسط،  $m$  جرم یک ذره گاز،  $k$  ثابت بولتزمن،  $T$  دما و  $d$  قطر ذرات است. در گازهای واقعی با در نظر گرفتن اثر جاذبه و دافعه رابطه ای به شکل زیر ارائه شده است:

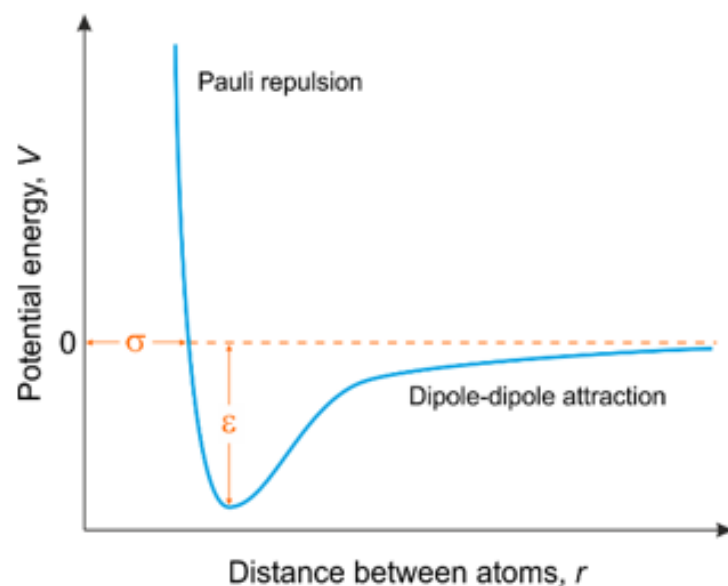
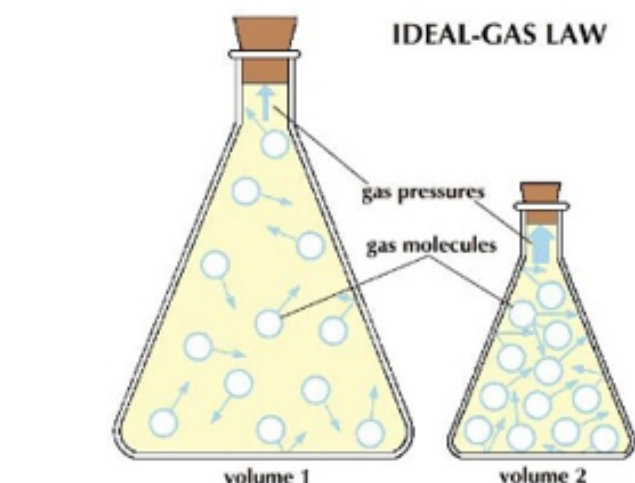
$$\mu = \frac{2.68 \times 10^{-6} \sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_v}$$

where  $\sigma$  = collision diameter, Å  
 $M$  = molecular weight of gas  
 $\mu$  = viscosity, kg/(m · s)  
 $T$  = absolute temperature, K

که در رابطه فوق،  $\Omega_v$  تابع ضعیفی از دما است:

$$\Omega_v \approx 1.147 \left( \frac{T}{T_\epsilon} \right)^{-0.145} + \left( \frac{T}{T_\epsilon} + 0.5 \right)^{-2.0}$$

در رابطه،  $T_\epsilon$  فوق یک پارامتر مولکولی دما است.



## ویسکوزیته مایعات



برای ویسکوزیته مایعات رابطه ای براساس تئوری Eyring ارائه شده است:

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} \exp\left(3.8 \frac{T_b}{T}\right) \quad (4)$$

در این رابطه،  $\tilde{N}$  عدد آووگادرو،  $h$  ثابت پلانک،  $\tilde{V}$  حجم یک مول،  $T_b$  دمای تبخیر و  $T$  دمای سیال است. رابطه فوق تحت شرایط زیر برای سیالات نیوتنی (رابطه خطی بین تنش و نرخ برش) استخراج شده است:

$$\frac{\tau_{xy} \tilde{V}}{RT} \ll 1 \rightarrow \tilde{V} \text{ is small}$$

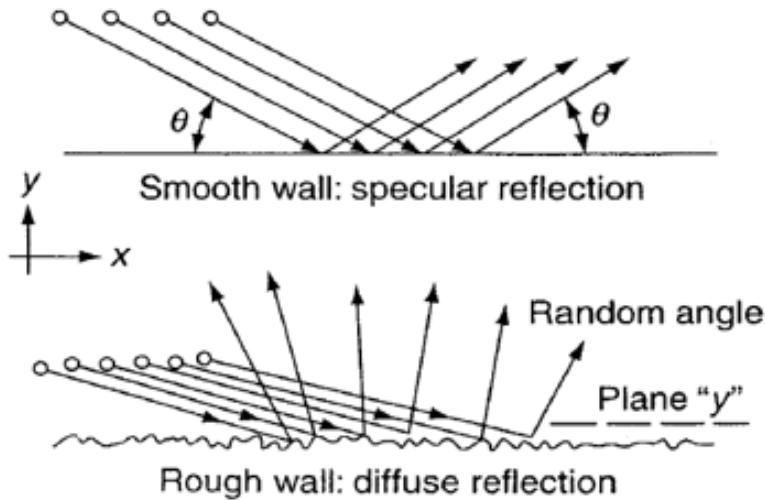
این نشان می دهد که رفتار نیوتنی در سیالات دارای ذرات کوچک وجود دارد که این مشاهدات تجربی هم سازگار است **چون رفتار غیرنیوتنی عمدتاً در مواد درشت ذره (پلیمرها) مشاهده می شود.** هرچند رابطه (۳) معمولاً دارای خطای قابل توجهی تا حدود ۳۰٪ است، اما فرم آرنیوسی این رابطه با مشاهدات تجربی کاملاً سازگار است (در این رابطه  $A$  و  $B$  ثابتهای تجربی هستند):

$$\mu = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (5)$$

## شرط مرزی جریان سیالات روی سطوح جامد

یافتن شرط مرزی جریان سیالات روی سطوح جامد یکی از مشکلات و دغدغه های اساسی در مکانیک سیالات بوده است. چنانچه سطح دیواره کاملاً صاف در نظر گرفته شود، می توان نشان داد که جریان سیال روی دیواره دارای لغزش آزاد خواهد بود:

For smooth wall:  $u_{in} = u_{out} \rightarrow$  Perfect Slip at Wall



For Rough wall (Maxwell (1879)):  $u_w = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$  (۶)

در رابطه فوق  $\lambda$  مسیر آزاد متوسط مولکولها و عددی بسیار کوچک است، لذا در بسیاری از کاربردهای مهندسی شرط مرزی **عدم لغزش** برقرار است. مطابق این شرط، سیال لزج به دیواره جامد می چسبد و لذا سرعت نسبی سیال و دیواره صفر است. بنابراین اگر دیواره ثابت باشد، سرعت سیال در محل دیوار نیز صفر است و اگر دیواره با سرعت  $U$  حرکت کند، سرعت سیال نیز در محل دیواره  $U$  خواهد بود.

مواردی که شرط مرزی عدم لغزش در آنها برقرار نیست

## ۱- لایه مرزی

با شروع از رابطه شرط لغزش ماکسول (رابطه (۶)) داریم:

$$u_w = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \lambda \frac{\tau_w}{\mu} \quad (۷)$$

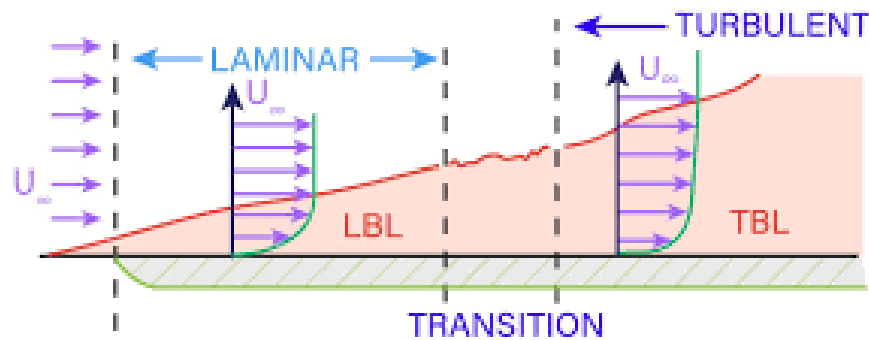
با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$u_w = \lambda \frac{\tau_w}{\frac{2}{3} \rho \lambda c} = \frac{3}{2} \frac{\tau_w}{\rho c} \quad (۸)$$

برای جریان لایه مرزی با سرعت بالادست  $U$  داریم:

$$\frac{u_w}{U} = \frac{3}{4} \frac{U}{c} \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (۹)$$

## THE BOUNDARY LAYER CONCEPT



در رابطه (۹)، دو گروه بی بعد **ماخ** و **ضریب اصطکاک** پوسته ای وجود دارند:

$$Ma = \frac{U}{c} \quad \& \quad C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (۱۰)$$



Paul Richard Heinrich Blasius

بنابراین با قرار دادن اعداد بی بعد از رابطه (۱۰) در رابطه (۹) داریم:

$$\frac{u_w}{U} = \frac{3}{4} Ma.C_f \quad (11)$$

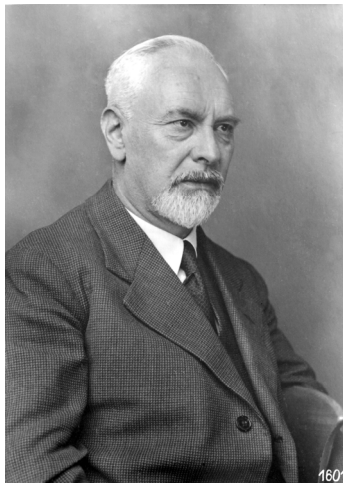
رابطه زیر از **حل بلازیوس** برای جریان لایه مرزی بدون گردایان فشار روی صفحه تخت استخراج شده است:

$$C_f = \frac{0.6}{\sqrt{Re_x}} \quad (12)$$

با قرار دادن رابطه (۱۲)، در رابطه (۱۱)، خواهیم داشت:

$$\frac{u_w}{U} = \frac{0.4 Ma}{\sqrt{Re_x}} \quad (13)$$

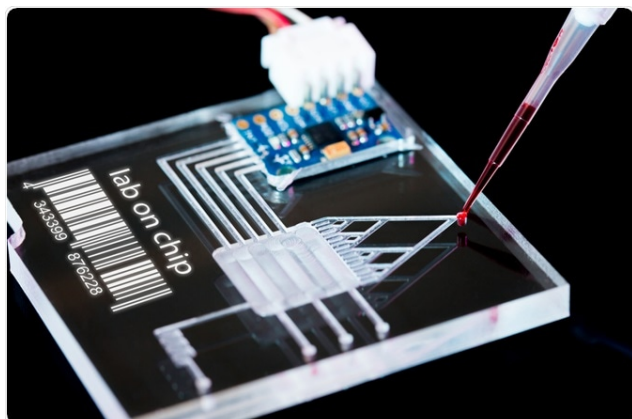
با توجه به رابطه (۱۳) نتیجه می شود که به ازای اعداد رینولدز موضعی بسیار کوچک ( $Re_x = \rho Ux / \mu \ll 1$ ) یعنی ناحیه **نزدیک لبه لایه مرزی** ( $x \rightarrow 0$ ) شرط مرزی عدم لغزش برقرار نیست.



Ludwig Prandtl



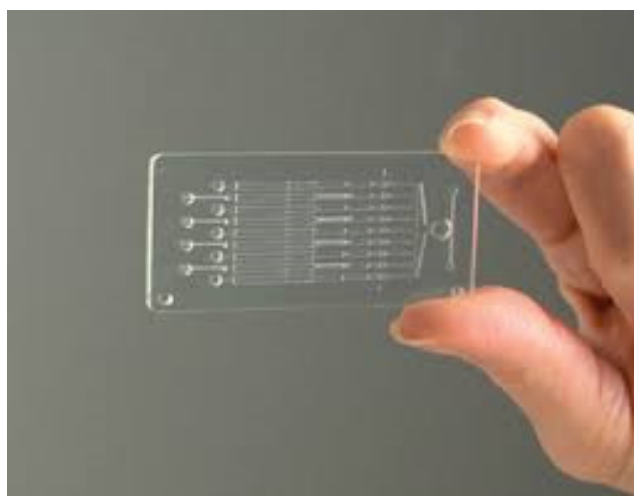
## ۲- جریان در مقیاسهای بسیار کوچک



عدد نادسن (Knudsen number) یکی از گروه های بی بعد مهم در مکانیک سیالات است که معمولاً به شکل زیر تعریف می شود:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (۱۴)$$

در رابطه فوق،  $\lambda$  مسیر آزاد متوسط مولکولها و  $L$  طول مرجع جریان است. توجه داشته باشید که طول مرجع نزدیک به مقیاس فیزیکی خود مساله (جریان) است. برای مثال طول مرجع در جریان لایه مرزی روی صفحه برابر طول خود صفحه و در مساله جریان داخل لوله برابر قطر لوله است. در نتیجه برای مسائل دارای **مقیاس بزرگ عدد نادسن بسیار کوچک و در حدود صفر است** اما در جریان در **مقیاسهای کوچک** مانند جریان درون میکروکانالها ممکن است که مقدار عدد نادسن قابل **توجه شود**. نتایج مکانیک محیط های پیوسته عملاً در اعداد نادسن کوچکتر از ۰/۰۱ صادق است.







Martin Knudsen

چنانچه در یک جریان،  $L$  طول مرجع و  $U$  سرعت مرجع باشد، بنابراین طولها و سرعتها به شکل زیر قابل بی بعد سازی هستند:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad \& \quad \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{U} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = L\mathbf{x}^* \quad \& \quad \mathbf{v} = U\mathbf{v}^* \quad (15)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱۵)، رابطه (۶) به شکل زیر قابل بازنویسی است:

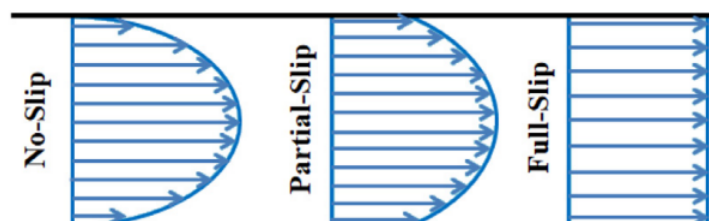
$$U.u_w^* = \lambda \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_w \frac{U}{L} \quad \rightarrow \quad u_w^* = \frac{\lambda}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_w \quad (16)$$

با توجه به رابطه (۱۴)، رابطه (۱۶) به شکل زیر قابل بیان است:

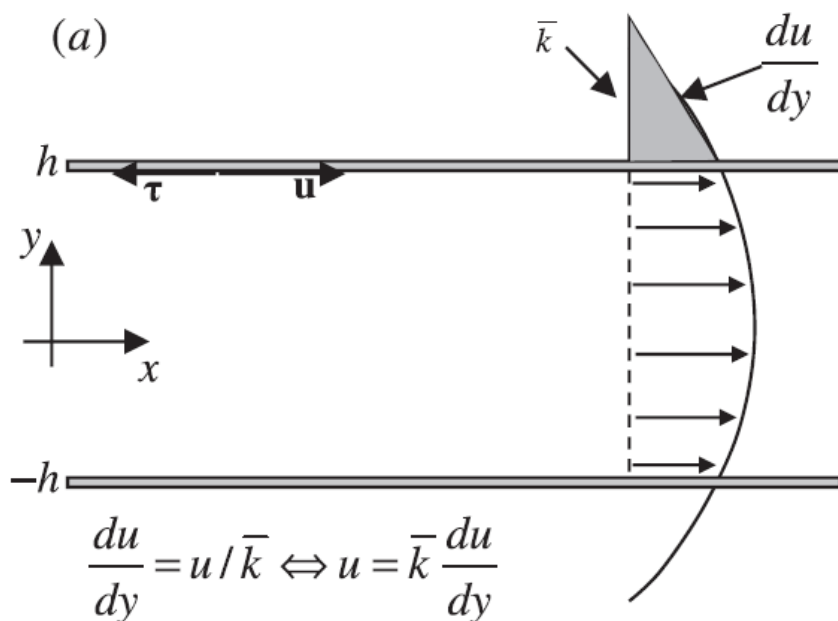
$$u_w^* = Kn \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_w \quad (17)$$

مطابق رابطه (۱۷)، در اعداد نادسن نزدیک صفر (مسائل دارای مقیاس بزرگ)، شرط مرزی عدم لغزش برقرار است. چنانچه عدد نادسن در یک مساله مقیاس کوچک (مانند یک میکروکانال) به اندازه کافی بزرگ باشد، در اینصورت شرط عدم لغزش برقرار نیست و جریان می تواند روی دیواره بلغزد.

نوع جریان	محدوده عدد نادسن
Continuum flow	$Kn < 0.01$
Slip flow	$0.01 < Kn < 0.1$
Transitional flow	$0.1 < Kn < 10$
Free molecular flow	$Kn > 10$



Schematic diagram of Poiseuille flow with slip boundary conditions.



### ۳- جریان سیالات غیرنیوتنی

در جریان سیالات غیرنیوتنی بویژه مذابهای پلیمری امکان وقوع لغزش روی دیواره حتی در مقیاسهای بزرگ هم وجود دارد. این مساله می تواند بر کیفیت محصولات پلیمری تولید شده به روش هایی نظیر تزریق پلاستیک تاثیر داشته باشد. برای این سیالات مدل های ریاضی متنوعی برگرفته از مدل لغزش ماکسول ارائه شده است:

$$u_w = \bar{k} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (18)$$

که در این رابطه  $\bar{k}$  طول لغزش نامیده می شود و برای خود این ضریب هم روابط متنوعی بسته به معادله ساختاری انواع سیالات غیرنیوتنی و داده های تجربی ارائه شده است.

## شرط مرزی جریان سیالات در ورودی و خروجی کانالها

در ورودی معمولا یکی از دو شرط زیر اعمال می شود:

- توزیع سرعت جریان معلوم است.
- فشار مقداری ثابت است.

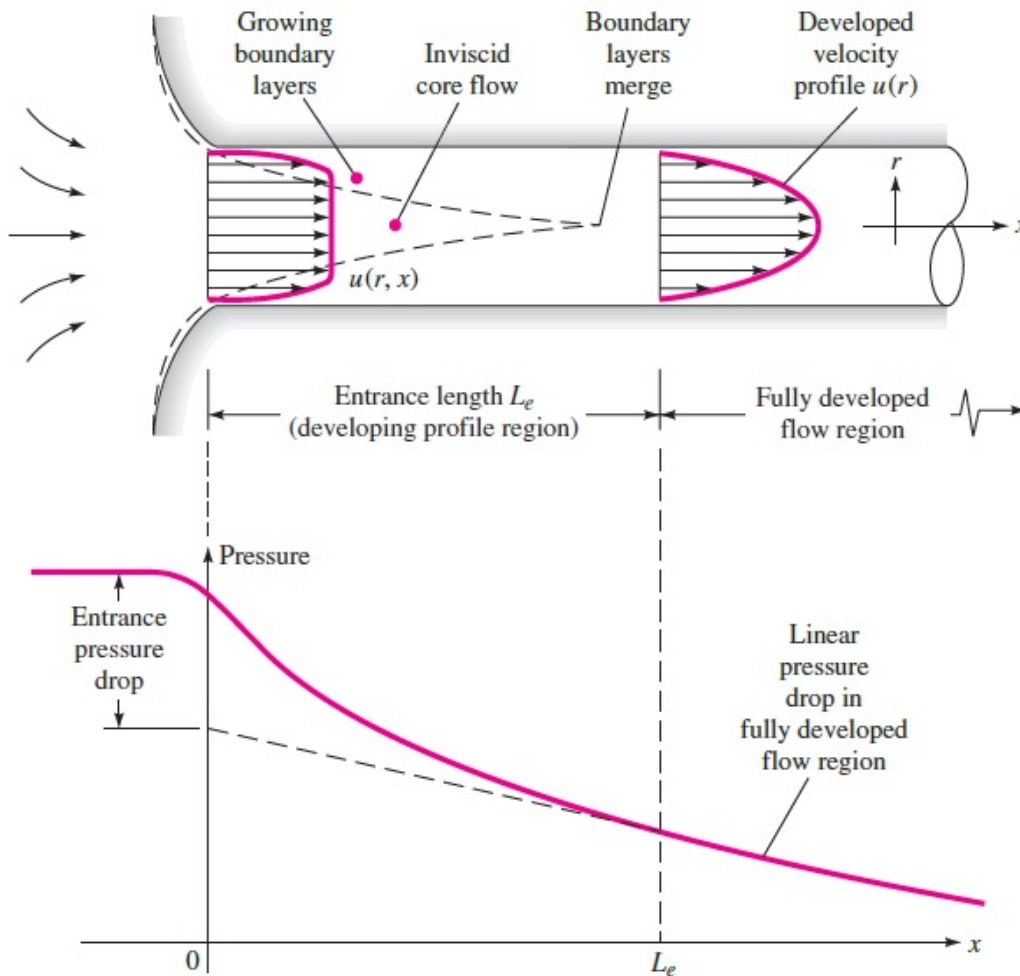
نکته ۱: توزیع سرعت یکنواخت (Uniform) در ورودی تقریبا معادل مکش کانال از یک مخزن بزرگ است.

در خروجی معمولا یکی از شرایط زیر اعمال می شود:

- توزیع سرعت جریان معلوم است.
- فشار مقداری ثابت است.
- جریان توسعه یافته است (یعنی گرادیان (مشتق) مولفه های سرعت و تنش نسبت به جهت پیشروی جریان صفر است. می توان نشان داد که در جریانهای توسعه یافته، گرادیان فشار مقداری ثابت است).

نکته ۲: فشار نسبی صفر در خروجی معادل تخلیه به اتمسفر است.

نکته ۳: اعمال تنها یکی از شرایط سرعت و فشار در هر مرز ورودی و خروجی کفایت می کند.



## شرط مرزی صفحه تقارن

شرط مرزی تقارن مربوط به صفحاتی است که جریان نسبت به آنها تقارن دارد. اعمال این شرط سبب کاهش هزینه محاسباتی و افزایش دقت می شود. چنانچه  $t$  یک جهت مماس بر صفحه تقارن و  $n$  جهت عمود بر آن باشد، در این صورت:

۱- برای کمیت های اسکالر: کمیت های اسکالر نظیر دما و فشار روی صفحه تقارن اکسیرم هستند، یعنی:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \& \dots$$

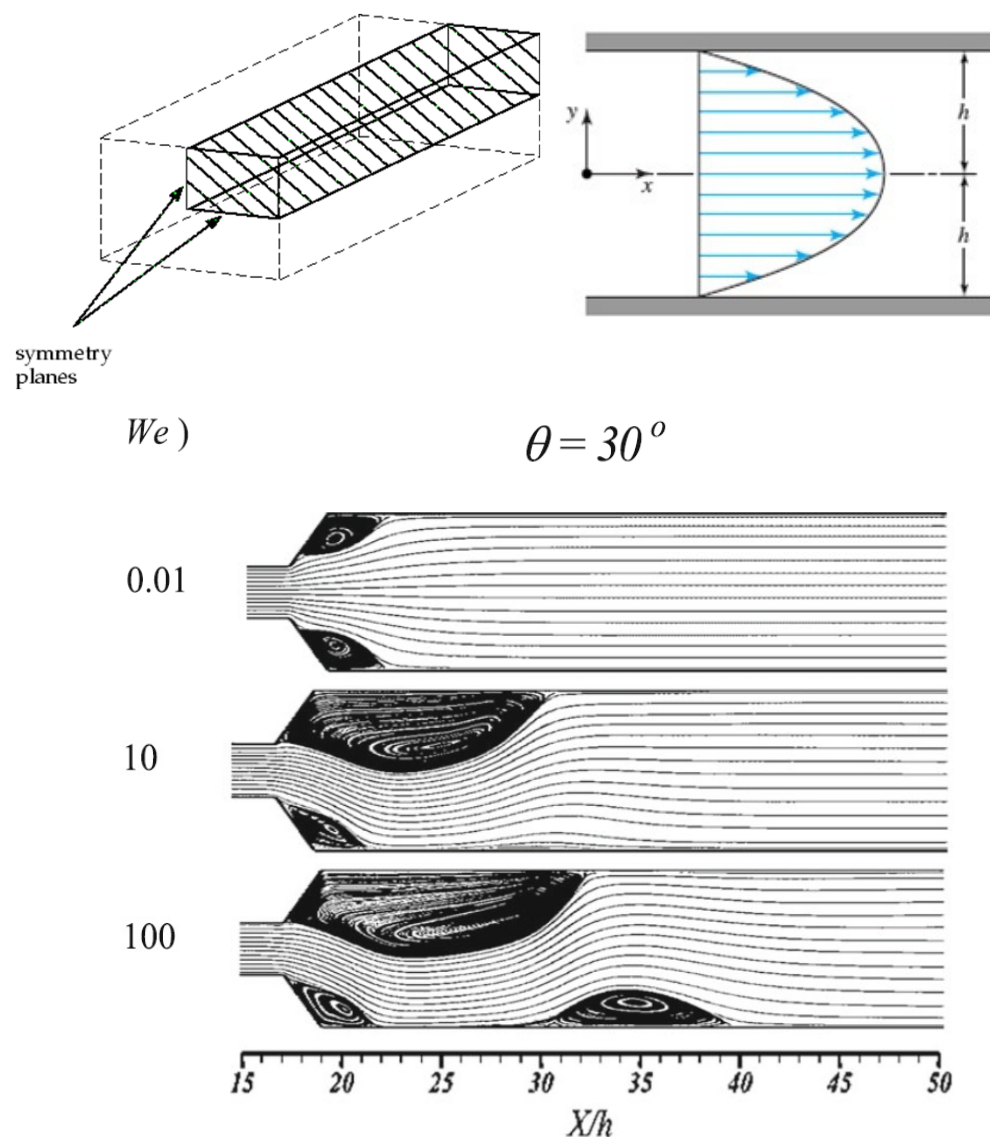
۲- برای کمیت های برداری مانند سرعت، مولفه های مماس بر صفحه تقارن اکسیرم هستند اما مولفه عمود بر صفحه تقارن صفر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_t}{\partial n} = 0 \\ v_n = 0 \end{cases}$$

۳- برای کمیت های تانسوری مانند تنش می توان نشان داد که از ۹ مولفه، ۵ مولفه اکسیرم و ۴ مولفه صفر هستند (اثبات کنید).

**نکته بسیار مهم:** متقارن بودن هندسه شرط لازم برای اعمال شرط مرزی تقارن است اما شرط کافی برای اعمال آن پایدار بودن جریان است. به عبارت دیگر اعمال این شرط در جریان های دارای هندسه متقارن اما ناپایدار سبب تولید جواب های کاملاً نادرست می شود.

12



## شرط مرزی متقارن محوری

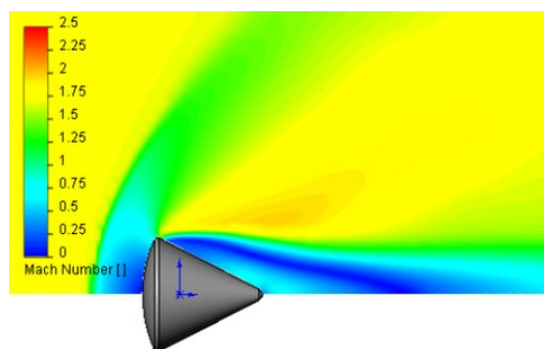
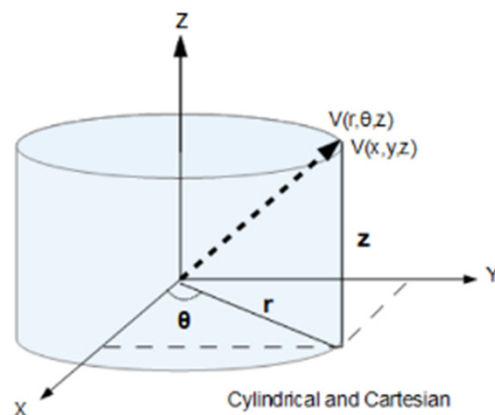
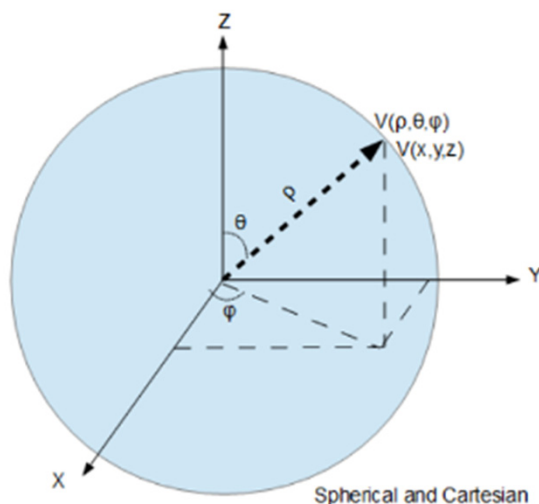
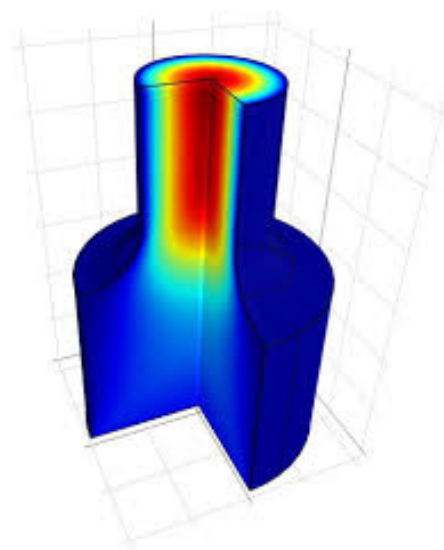
این شرط مرزی مربوط به هندسه هایی است که دارای محور تقارن هستند. معمولا این شرط مرزی در دستگاه مختصات استوانه ای و کروی برای توصیف جریانهایی نظیر جریان داخل لوله، جریان بین استوانه های هم مرکز ایستا و چرخان، جریان داخل نازلها و دیفیوزرها، جریان حول یک مخروط به موازات ارتفاع مخروط، جریان پایدار حول کره و نظایر آن قابل استفاده است. برای اعمال این شرط، معمولا **محور Z** روی محور تقارن منطبق می شود و در نتیجه برای کل ناحیه محاسباتی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \text{برای دستگاه مختصات استوانه ای:}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{برای دستگاه مختصات کروی:}$$

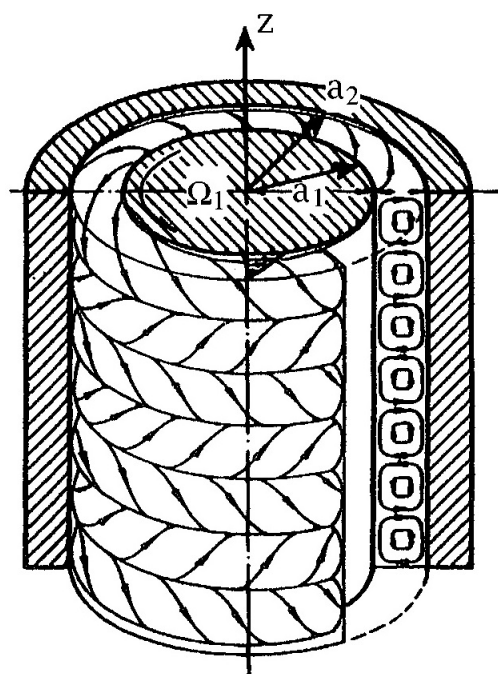
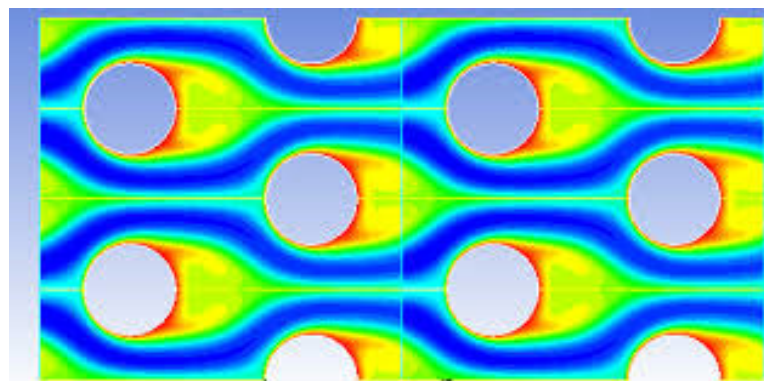
لذا هیچ کمیتی وابسته به جهت  $\theta$  یا  $\varphi$  نیست و با اعمال این شرط یکی از ابعاد مساله کاهش می یابد. بنابراین اعمال این شرط به شدت به کاهش هزینه محاسباتی کمک می کند.

نکته: در دستگاه های مختصات استوانه ای و کروی بعضا نیاز به اعمال شرط اجتناب از سینگولاریتی (نقطه تکین) روی محور تقارن یا مبدا مختصات برای برخی از کمیت های فیزیکی است.





## شرط مرزی پریودیک



شرط مرزی پریودیک بدین معنی است که کل میدان جریان و دما در دو مرز یا یکدیگر کاملاً یکسان است (رفتار میدان جریان و دما روی دو مرز تکرار شده است). بطور کلی این شرط مرزی در سه حالت قابل اعمال است:

۱- در هندسه‌هایی که ابتدا و انتهای یکی از مختصات بر هم منطبق باشد، برای مثال در یک دیسک و در دستگاه مختصات قطبی، جهت  $\theta$  در زوایای صفر و  $2\pi$  کاملاً بر یکدیگر منطبق است. همین موضوع عیناً برای یک کره کامل در دستگاه مختصات کروی و در جهت  $\varphi$  صادق است.

۲- قصد تعمیم یک الگو به میدان جریان را داشته باشیم (مانند مساله جریان حول چیدمان استوانه‌ها).

۳- جریان دچار ناپایداری شده و یک الگوی تکرار شونده در میدان جریان بوجود آید (مانند مد اول ناپایداری تیلور-کوئت). در این صورت با تعیین طول موج ناپایداری‌ها امکان شناخت فاصله مرزهای پریودیک و اعمال این شرط مرزی وجود خواهد داشت.

**نکته:** از آنجا که میدان سرعت، فشار و دما روی مرزهای پریودیک مجهول است و به دلیل ماهیت مشتق مرتبه دوم معادلات بقا نسبت به مکان، معمولاً نه تنها نیاز به برابر قرار دادن خود توابع مجهول (سرعت، فشار، دما و ...) بلکه نیاز به برابر قرار دادن گرادیانهای آنها نیز هست.

## شرط مرزی در مرز تماس دو سیال

چنانچه دو سیال دارای یک مرز تماس مشترک باشند (مانند مرز تماس یک مایع و یک گاز و یا مرز تماس میان دو مایع غیر قابل انحلال)، در این صورت روی این مرز داریم:

$$V_1 = V_2 \quad \tau_1 = \tau_2$$

چنانچه یکی از سیالات مایع و دیگری گاز باشد، در دو حالت زیر امکان بدست آوردن شرط مرزی ساده تری برای فاز مایع در فصل مشترک وجود دارد:

۱- عامل جریان در فاز مایع، اثر برشی ناشی از جریان گاز باشد (مانند جریان در سطح آب در اثر وزش باد روی آن). در این حالت فرض می شود که یک تنش برشی ثابت از سمت گاز به مایع اعمال می شود:

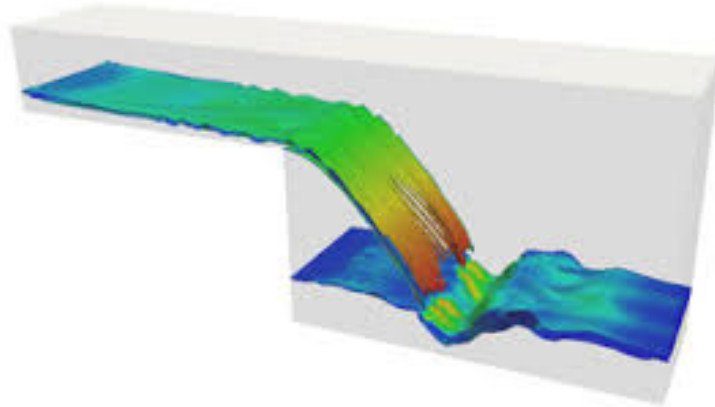
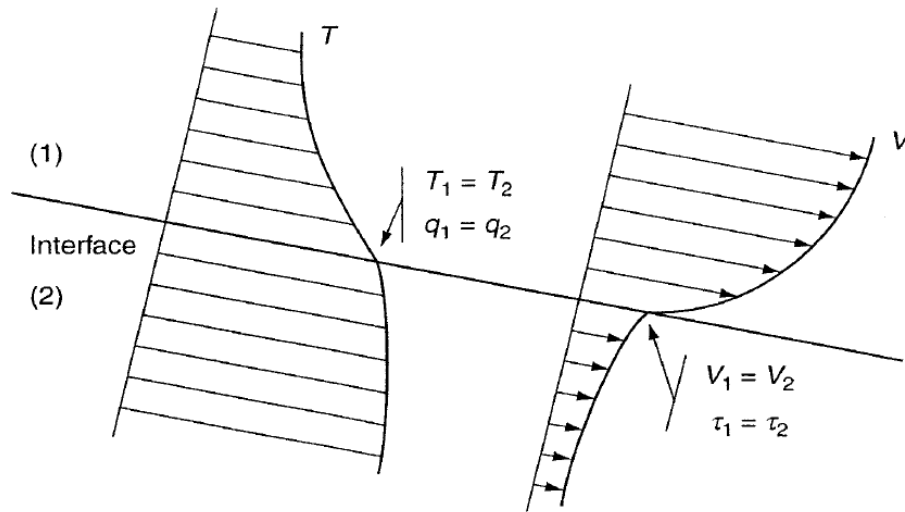
$$\tau_{Liquid} = K \rightarrow \mu \frac{\partial v_t}{\partial n} = K \rightarrow \frac{\partial v_t}{\partial n} = \frac{K}{\mu}$$

۲- عامل جریان در فاز مایع ناشی از برش در گاز نباشد (برای نمونه جریان آب روی یک سطح شیبدار که ناشی از گرانش است).

$$\tau_{Liquid} = \tau_{Gas} \rightarrow \left( \mu \frac{\partial v_t}{\partial n} \right)_{Liquid} = \left( \mu \frac{\partial v_t}{\partial n} \right)_{Gas}$$

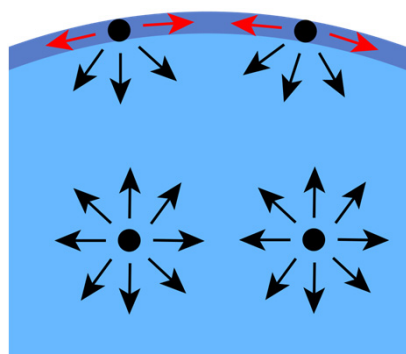
$$\frac{\partial v_t}{\partial n} \Big|_{Liquid} = \frac{\mu_{Gas}}{\mu_{Liquid}} \left( \frac{\partial v_t}{\partial n} \right)_{Gas} \xrightarrow{\mu_{Liquid} \gg \mu_{Gas}} \frac{\partial v_t}{\partial n} \Big|_{Liquid} \approx 0$$

در روابط فوق،  $t$  جهت مماس بر مرز تماس و  $n$  جهت عمود بر آن است.





## کشش سطحی



کشش سطحی خاصیتی مربوط به مایعات است که سبب می شود که سطح مشترک آنها با سایر سیالات (نظیر یک گاز و یا یک مایع غیرقابل انحلال دیگر) به مانند یک لایه کشسان عمل کند. این لایه کشسان در برابر فرار مولکولهای مایع و یا ورود اجسام خارجی مقاومت می کند.

تئوریهای توصیف علت وقوع کشش سطحی:

۱- تئوری نیرو: برآیند نیروی جاذبه وارد بر مولکولهای یک مایع که در عمق آن قرار دارند صفر است، زیرا این مولکولها از همه سمت تحت تاثیر جاذبه مولکولی اطراف آن قرار دارند. اما در مورد مولکولهای سطحی اینچنین نیست و مولکولها فقط به سمت داخل مایع کشیده می شوند. در نتیجه سطح مایع به شکل ورقه ای الاستیک عمل می کند که به سمت داخل کشیده می شود و در نتیجه مایع تمایل به رسیدن به کمترین سطح را دارد.

۲- تئوری کمینه انرژی: مواد تمایل به رسیدن به کمینه انرژی را دارند و کمینه انرژی در برآیند نیروی صفر اتفاق می افتد. انرژی پتانسیل الکتروستاتیک مولکولهای عمقی از مولکولی سطحی کمتر است (چون برآیند نیروهای جاذبه مولکولهای عمقی صفر است) و لذا مولکولهای سطحی تمایل دارند که به سمت عمق کشیده می شوند.

## ضریب کشش سطحی

نیروی کشش سطحی بصورت یک نیروی مماسی بر پیرامون لایه سطح مایع وارد می شود و مقدار آن از رابطه زیر بدست می آید:

$$dF = \gamma dL$$

در رابطه فوق،  $dL$  طول المان ناحیه پیرامونی لایه سطح مایع و  $\gamma$  ضریب کشش سطحی است (در بعضی مراجع با  $\sigma$  هم نشان داده می شود).

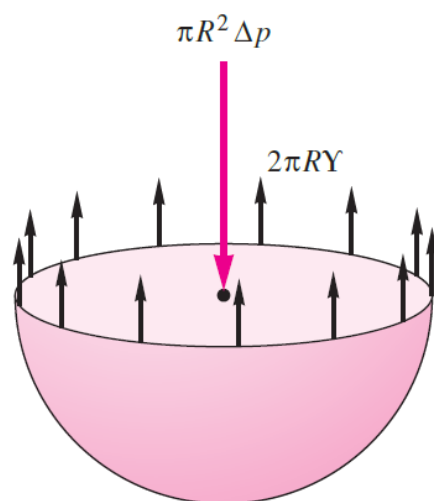
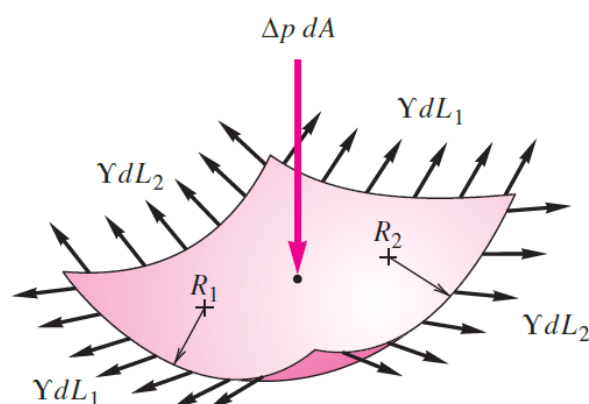
$$\gamma = \begin{cases} 0.0050 \text{ lbf/ft} = 0.073 \text{ N/m} & \text{air-water} \\ 0.033 \text{ lbf/ft} = 0.48 \text{ N/m} & \text{air-mercury} \end{cases}$$

اثر این نیرو معمولا با اختلاف فشار میان دو فاز به تعادل می رسد. به عبارت دیگر نیروی کشش سطحی سبب ایجاد اختلاف فشار بین مایع و محیط بیرونی (مایع یا گاز آنسوی فصل مشترک) می شود. مطابق شکل، در یک قطره، اختلاف فشار با محیط بیرونی از رابطه زیر بدست می آید:

$$2\pi R\gamma = \pi R^2 \Delta p \rightarrow \Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$

چنانچه یک حباب بصورت یک کره کامل در نظر گرفته شود که از دو سطح بالا و پایین تحت تاثیر نیروی کشش سطحی است، داریم:

$$\Delta p_{\text{bubble}} = 2\Delta p_{\text{droplet}} = \frac{4\gamma}{R}$$



## عوامل موثر بر کشش سطحی

- ۱- ضریب کشش سطحی با افزایش دما کاهش می یابد.
- ۲- مواد سورفاکتانت (که در شوینده ها موجود هستند) سبب کاهش ضریب کشش سطحی می شوند.
- ۳- وجود ناخالصی هایی نظیر الکترولیت های معدنی معمولا سبب افزایش ضریب کشش سطحی می شوند.

## زاویه تماس

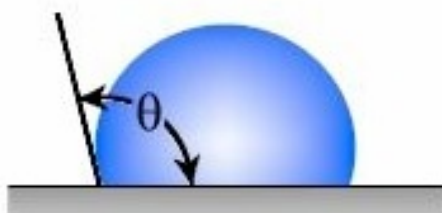
زاویه تماس ( $\theta$ ) یکی از پارامترهای سطحی مهم در مکانیک سیالات است که برای تماس یک مایع با یک سطح جامد تعریف می شود. اگر در تماس یک قطره از یک مایع با یک سطح جامد، این زاویه کمتر از ۹۰ درجه باشد اصطلاحاً این سیال سطح مربوطه را تر می کند و چنانچه زاویه بیشتر از ۹۰ درجه باشد سطح نسبت به سیال غیر ترشونده (Nonwetting) است. چنانچه سیال مربوطه آب باشد، برای این منظور از واژه هایی نظیر آب دوست (hydrophilic) و آب گریز (hydrophobic) برای سطح مورد نظر استفاده می شود. همچنین از آنجا که چربی در آب حل نمی شود، معمولا در کاربردهای مختلف از واژه مقابل آن به مفهوم چربی دوستی (Lipophilicity) و چربی گریزی (Lipophobicity) نیز استفاده می شود.

hydrophobic

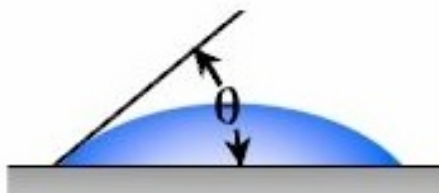
hydrophilic



Hydrophobic  
Surface



Hydrophilic  
Surface





THANK  
YOU